Exercices et problèmes

19 Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x,y)$ associe le point M' de coordonnées $\begin{cases} X = \frac{1}{4}\left(x+\sqrt{3}y\right) \\ Y = \frac{1}{4}\left(-\sqrt{3}x+y\right) \end{cases}$.

1. Montrer que f est une similitude direct de centre O, de rapport 0.5 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

2. Une courbe $\mathcal{C}$ a pour équation $15x^2+13y^2-2\sqrt{3}xy-768=0$.

a. Déterminer une équation de $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par f.

b. En déduire que $\mathcal{C}'$ est une ellipse à caractériser.

20 1. Soit $E=\left\{M(x,y)\in P \text{ tel que } x^2+4y^2=1\right\}$.

Donner les éléments caractéristiques de E.

2. Soit D et D′ les droites d'équations respectives $x=1$ et $x=-1$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$. Soit $M_0\left(\cos(\theta),\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)$ un point de E avec $\theta\in\Re\backslash\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

a. Vérifier que M_0 appartient à E.

b. Ecrire l'équation de la tangente T à E au point M_0.

c. T coupe D et D′ respectivement en K et K′.

Montrer que KFK′ est un triangle rectangle en F.

21 Déterminer la nature de chacune des courbes suivantes en donnant ses éléments caractéristiques, puis la construire.

1. $x^2+4y^2+6y=0$.

2. $(3x+5y)^2=(6x-1)(5y+2)$.

3. $x^2-y=3x-1$

22 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\left(4x^2-9y^2+8x+54y-113\right)=0$ ou $\left(16x^2+9y^2+12x-54y-47\right)=0$.

23 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\frac{y^4}{16}=x^4-2x^2+1$.

Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux coniques.

Déterminer les éléments caractéristiques de ces coniques puis les tracer dans un même repère.

24 Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation $mx^2+(1+m^2)y^2-2my=0$.

25 On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $4x|x|+y^2-16x-20=0$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est la réunion d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_1$ et d'une partie d'une conique $\mathcal{C}_2$ que l'on identifiera.

2. Déterminer pour chacune des coniques les éléments caractéristiques.

3. Soit A un point où chacune des coniques coupe la droite $(O,\vec{j})$.

Montrer que les coniques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont même tangente en A.

Tracer $\mathcal{C}$ en prenant pour unité le centimètre.

26 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y=\sqrt{|x^2-6x+5|}$.

27 Construire l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $16x|x|+36y|y|=576$.

28 On considère une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \ (a>b>0)$. On note A_1 et A_2 les sommets principaux de $\mathcal{E}$ et T_1 et T_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2. Par un point P de $\mathcal{E}$ distinct de A_1 et A_2, on mène une tangente T à $\mathcal{E}$ qui coupe T_1 en P_1 et T_2 en P_2. Montrer que $\overrightarrow{A_1P_1}.\overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.

29 Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation $2x^2+y^2-2x+y-1=0$.

Déterminer les tangentes issues du point $I(2,3)$ à $\mathcal{C}$.

30 Soit a un réel strictement positif.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{4y^2}{a^2}=1$ de sommets principaux A et B.

Soit I un point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AO}$.

On note P et Q les points de contact des tangentes à $\mathcal{E}$ issues de I. Que vaut l'angle $\widehat{PIQ}$?